Institutt for fysikk, NTNU

FY1002 Bølgefysikk, høst 2007

Laboratorieøvelse 3

Fysisk pendel
Bestemmelse av tyngdens akselerasjon

Hensikt

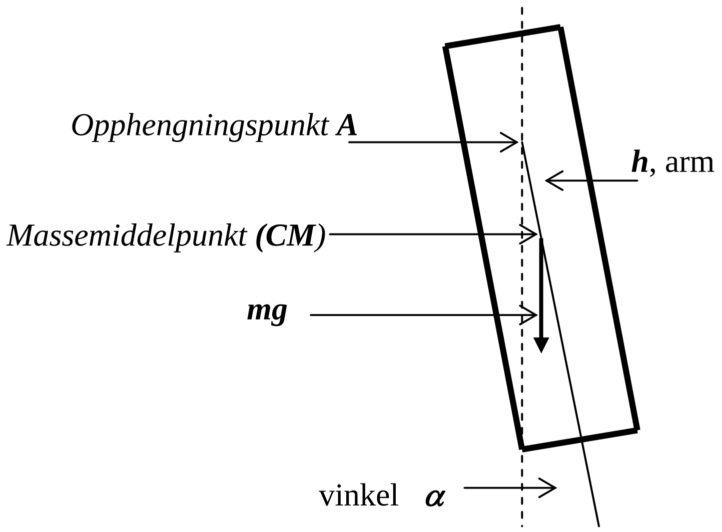
Hensikten med denne øvelsen er å bli kjent med den fysiske pendelen som et instrument for nøyaktig måling av tyngdens akselerasjon (g). I det mest moderne utstyr for måling av g lar en et legeme falle, og måler posisjonen med interferometriske metoder (optiske) og tiden med atomklokke. I begge tilfeller må en ha en teori for å beskrive systemet, som sier hvorledes fysisk observable størrelser, for eksempel svingetid i dette tilfelle, vil avhenge av størrelsen en ønsker å bestemme (g).
Måling av en størrelse krever valg av en målemetode, og måling er også beheftet med usikkerhet. I denne oppgaven blir du også introdusert for usikkerhet og usikkerhetsberegning. I denne sammenheng vil vi gjøre bruk av regneark (EXCEL) for beregning av middelverdi, standardavvik og standardfeil, og hvordan dette påvirker usikkerheten i den sammensatte målingen.

Oppgaver

1. Mål svingetiden (T) til pendelen som funksjon av avstanden mellom massemiddelpunktet (CM) og opphengningspunktet (h). La h variere i intervallet mellom 10-35 cm i skritt på 5 cm. For hver h gjentas målingen 5 ganger.
2. Før resultatene inn i ett regneark (EXCEL) og beregn middelverdi med standardavvik til svingetiden for hver h. Bruk regnearket til å framstille T grafisk som funksjon av h. Dette gjøres ved å beregne produktene: $y = hT^2$ og: $x = h^2$ og deretter framstille $\boldsymbol{y}$ som funksjon av $\boldsymbol{x}$ i regnearket. Lag en lineær tilpasning av $\boldsymbol{y}$ som funksjon av $\boldsymbol{x}$ og finn stigningstallet (k) og skjæringspunktet for denne linjen med y-aksen (y_0). Finn tyngdens akselerasjon (g) og redusert lengde ($\boldsymbol{r}$) til pendelen, ved å sammenlikne tilpasningsparametrene (k, y_0) med tilsvarende teoretiske uttrykk.
3. Innstill deretter $h = \boldsymbol{r}$ og mål svingetiden 25 ganger (n = 25). Regn ut middelverdien, standardavviket, og standardavviket til middelverdiene (standardfeilen) for denne måleserien. Finn g med usikkerhetsgrenser fra denne måleserien.
4. Del de 25 målingene fra punkt 3 i grupper av 5 og regn ut middelverdi og standardavvik for hver gruppe. Regn ut standardavviket for de fem middelverdiene. Hvordan stemmer dette med teoretisk forventet verdi?

Teori og bakgrunnsstoff

Figuren viser en fysisk pendel med masse m som svinger om aksen A. Avstanden fra opphengingspunktet ***A*** til massemiddelpunktet (***CM***) er ***h***.



Likningen som bestemmer bevegelsen til pendelen kalles ofte spinnsatsen, som sier at den tidsderiverte av ***spinnet*** til systemet er lik ***momentet*** av de ytre kreftene på systemet. Spinnet til et legeme er lik treghetsmomentet (***I***) multiplisert med vinkelhastigheten $\boldsymbol{\omega}$. Momentet er *produktet av kraft og arm*, i kraftens retning. Dersom opphengningspunktet velges som referansepunkt, blir momentet til krefter på pendelen fra dette null, og spinnsatsen om A som referansepunkt blir:

$$d(I_A\omega)/dt = -mgh \cdot \sin\alpha \qquad \text{eller videre:} \qquad I_A \frac{d^2\alpha}{dt^2} + mgh \cdot \alpha = 0$$

Vinkelhastigheten ω er den tidsderiverte til utslagsvinkelen α; $\omega = d\alpha/dt$, som er vinkelen mellom loddlinjen og pendelens lengderetning. Ved små vinkler er $\sin\alpha \approx \alpha$, og bruk derfor små utslagsvinkler for pendelbevegelsen.

Ifølge Steiners sats kan treghetsmomentet til staven om svingeaksen A uttrykkes på følgende vis;

$$I_A = I_{CM} + mh^2 \quad ,$$

og treghetsmomentet til en rektangulær stav (med lengde ***l*** og bredde ***b***) om tyngdepunket (CM) er:

$$I_{CM} = m \cdot \frac{l^2 + b^2}{12} \equiv m \cdot r^2 , \qquad \text{der } r = \sqrt{\frac{l^2 + b^2}{12}}$$, og kalles treghetsradien til pendelen. ***r*** benevnes også som den reduserte lengden til pendelen.

Løsningen av bevegelseslikningen, eller spinnsatsen, for staven er:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cdot \sin(\omega_o \cdot t + \varphi)$$, der

α_o er maksimalutslaget til pendelen og φ kalles fasevinkelen. Begge disse størrelsene er integrasjonskonstanter fra løsningen av bevegelseslikningen, som er av en andre ordens differensiallikningen. ω_o er sirkelfrekvensen, som er en sammensatt størrelse:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{mgh}{I_A}}$$

Svingetiden ***T***, eller perioden for pendelen, er tiden som pendelen bruker på en svingning. Den er tiden som medgår for at vinkelutslaget vil bli det samme som ved en vilkårlig tidligere tid t:

$\alpha(t+T) = \alpha(t)$, som gir at: $\omega_o \cdot T = 2\pi$, som videre gir:

$$\underline{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{(r^2+h^2)}{gh}}}$$

Uttrykket over viser at svingetiden ***T*** er en funksjon av ***h***; avstanden mellom opphengningspunket *A* og massemiddelpunktet *CM*.

Dette uttrykket over lar omforme til følgende relasjon:

$$h \cdot T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2}{g} \cdot (h^2 + r^2),$$

som sier at produktet $h \cdot T^2$ er en lineær funksjon av størrelsen h^2. Det er dette uttrykket som brukes ved bestemmelse av g etter den første metoden.

Minimal svingetid

Dersom utrykket for svingetiden deriveres partielt med hensyn på h, får en:

$$\partial T / \partial h = 2 \cdot \pi \cdot (1/2) \cdot (\frac{r^2+h^2}{gh})^{-1/2} \cdot (\frac{(2h \cdot gh - (r^2+h^2) \cdot g)}{(gh)^2})$$

Uttrykket i de siste parentesen blir null når $h = r$, og da har svingetiden ett minimum.
Når en setter inn $h = r$ i utrykket for svingetiden, får en den minimale svingetiden til å bli:

$T_m = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{2r}{g}}$, eller når en løser dette med hensyn på g: $\underline{g = \frac{8\pi^2 \cdot r}{T_m^2}}$

Det er dette uttrykket som brukes ved bruk av den andre framgangsmåten.

Apparatur

Dimensjoner og relasjoner

De omtrentlige fysiske dimensjonene til pendlene er (disse måler dere):

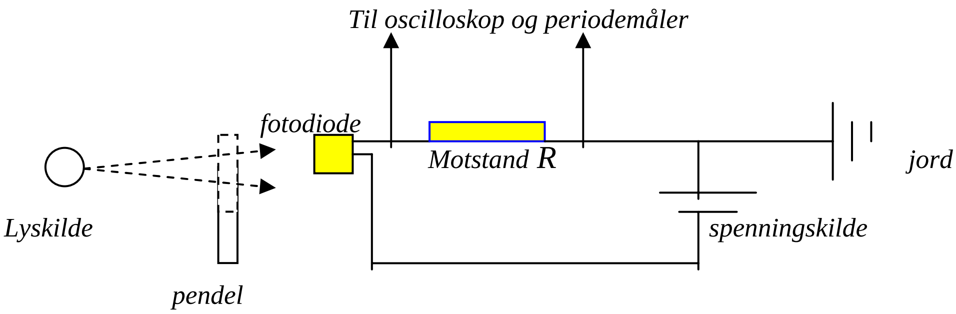
$l(lengde) = (94.37 \pm 0.05)cm$, og $b(bredde) = 2.540 \pm 0.005)cm$ (den ene, med Neon).
$l(lengde) = (100.003 \pm 0.005)cm$, og $b(bredde) = 2.540 \pm 0.005)cm$ (den andre, med HP).
$l(lengde) = (99.989 \pm 0.005)cm$, og $b(bredde) = 2.540 \pm 0.005)cm$ (den tredje, med Matlab).

Treghetsradien, eller den reduserte lengden, for pendlene blir da:

$$r = \sqrt{\frac{l^2 + b^2}{12}} = 27.26 cm \text{ (ene)} = 28.93 \text{ cm (andre)} = 28.86 \text{ cm (tredje)}$$

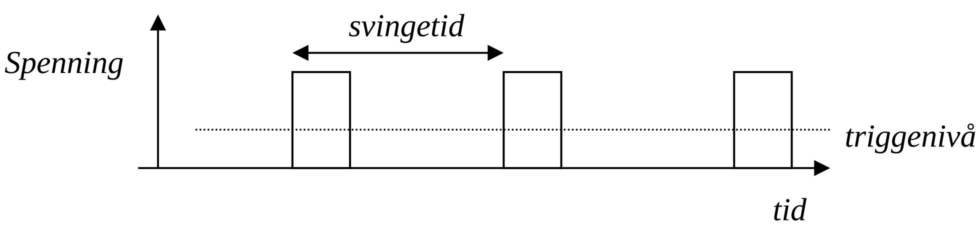
Tidsmålinger

Det rettes en lysstråle mot pendelen, og pendelbevegelsen vil periodisk skygge for en *fotodiode* som er plassert på den andre siden. En fotodiode omvandler lys til strøm. Dioden er koblet i parallell med en elektrisk motstand, og over disse legges det en fast elektrisk spenning (ca. 5 Volt). Når dioden belyses, produseres det en elektrisk strøm (I) i kretsen og der med ett spenningsfall: V = RI, over motstanden, og denne spenningen føres inn til en periodeteller. Når det elektriske signalet *vokser over* en viss verdi, kalt *triggenivået*, vil tidsmålingen startes. Triggenivået kan innstilles på instrumentet. Tidsmålingen stoppes når dette skjer pånytt.



Skisse over apparatur for måling av pendelens svingetid

Spenningen over motstanden vil ha følgende tidsforløp:



Tidsforløp av signal fra elektrisk krets

Hver gang signalet er økende og passerer triggenivået, starter periodetelleren, og den påfølgende hendelsen vil stoppe den, dermed måles svingetiden.

Lengdemåling

I vår framgangsmåte vil tyngdens akselerasjon avhenge både av svingetid og lengden av pendelen, som følgelig også må måles. Alle målinger er en sammenlikning med en standard, som for lengdemåling er meterstaven. Gå fram på følgende vis: Legg meterstaven i en skinne, og skyv staven mot en rektangulær forhøyning i den ene enden av skinnen. I den andre enden av skinna er det en mikrometerskrue. Roter omdreiningsskruen til det bevegelige sylinderhodet anslutter den andre enden av meterstaven, og les av verdien til posisjonen av målesylinderen (x_m). Bytt så ut meterstaven med pendelen, og gjør samme operasjon for pendelen (x_p). Pendellengden er da: ***l* = 1m + (*x***$\boldsymbol{x_p - x_m}$**)**. Begge studentene i teamet gjør dette ***(l₁ og l₂***, og lengden av pendelen med usikkerhetsgrenser settes:

$$l = \frac{l_1 + l_2}{2} \quad \text{og usikkerhet:} \quad \sigma_l = \frac{l_1 - l_2}{2}, \quad (\text{egentlig:} \ \sigma_l = \sqrt{\frac{(l_1 - l)^2 + (l_2 - l)^2}{2-1}},$$

siden dette er standardavvik for to målinger).
En omdreining på mikrometerskruen tilsvarer 0.5 mm, som er delt inn i 50 delestreker.

Praktiske kommentarer

Punkt 1: I vedlegget finner du et eksempel på hvordan målingene er ført inn i EXCEL regnearket. Bruk EXCEL funksjonene til beregning av middelverdier og standardavvik.

Punkt 2: I vedlegget finner du også eksempel på hvordan middelverdiene er ført inn i regnearket, og hvordan ($\boldsymbol{y \equiv hT^2}$) er framstilt mot ($\boldsymbol{x \equiv h^2}$, ≡ betyr identisk lik) og tilpasningen til rett linje. Parametrene for rett linje kommer også med, når du ber om det (høyreklikk på grafen, be om vis likning).
Når en sammenlikner uttrykket for rett linje:

$$y = k \cdot x + y_0 \ \ (\textit{rett linje}) \qquad \text{med;} \quad h \cdot T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2}{g} \cdot (h^2 + r^2),$$

som er det sammensatte uttrykket for sammenhengen mellom svingetid (*T*) og avstand *h* mellom CM og opphengingspunkt A;

$$\text{ser en at:} \ k = \frac{4\pi^2}{g}, \quad \text{eller:} \quad \underline{g = \frac{4\pi^2}{k}}, \quad \text{og :} \quad y_0 = \frac{4 \cdot \pi^2}{g} \cdot r^2, \ \text{eller:} \ \underline{r = \sqrt{\frac{y_0}{k}}}$$

g og ***r*** finnes ut fra disse uttrykkene, etter at tilpasningsparametrene er bestemt.

Punkt 3: I følge uttrykket for ***g*** fra "minimal svingetid metoden" har vi:

$$g = \frac{8\pi^2 \cdot r}{T_m^2}$$

$\boldsymbol{T_m}$ (videre kalt ***T***) er gjennomsnittet av alle n = 25 målingene, og ***r*** er pendelens reduserte lengde:

$$r = \sqrt{\frac{l^2 + b^2}{12}}$$. Gjør beregningen av ***r*** og ***g*** i EXCEL.

Uttrykket for *g* er sammensatt av *r* og *T*, og usikkerheten i *g* setter seg dermed sammen av usikkerhetsbidrag både fra *r* og *T* (σ_r *og* σ_T ,se notatet om usikkerhet).

Usikkerheten i ***g*** er bestemt ved: $$\frac{\sigma_g}{g} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_r}{r}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_T}{T}\right)^2}$$

Når T er målt n ganger, brukes *standardavviket på middelverdiene*, kalt ***standardfeilen*** *($\sigma_T(n)$)*, i beregningen av usikkerhet.

Den er: $\sigma_T(n) = \frac{\sigma_T}{\sqrt{n}}$

σ_T er standardavviket, som er kvadratroten av kvadratsummen av måleavvikene fra middelverdien, dividert med antallet målinger minus 1, se notatet om usikkerhet. Beregning av standardavvik og standardfeil kan gjøres i EXCEL.
Det er lengden av pendelen som betyr mest både i uttrykket for pendelens reduserte lengde og usikkerheten i denne størrelsen. Uttrykket for den relative feilen i treghetsradius settes lik relativ usikkerhet i pendelens lengde. Dette fordi vi tilnærmet har: $r = \sqrt{\frac{l^2 + b^2}{12}} \cong \frac{l}{\sqrt{12}}$, og

dermed: $\sigma_r / r \approx \sigma_l / l = 0.004cm / 100cm = 4 \cdot 10^{-5} (eller\ 0.04 / 95 = 4 \cdot 10^{-4})$

Punkt 4: ***Standardfeilen*** kalles ofte *standardavviket på middelverdiene*. For bedre å forstå hva standardfeilen til måleserien er, kan en dele de 25 målingene inn i 5 grupper.

Gjør følgende:

- Regn først ut ***middelverdiene*** og s***tandardavvikene*** (*standard deviation*; *SD*) for hver av de *fem* gruppene (bruk EXCEL).

- Regn deretter ut *middelverdien* og *standardavviket* til ***middelverdiene***, som du har funnet for hver av de fem gruppene. Den siste størrelsen kalles *standardfeilen* (*standard error*; *SE*).

- Kontroller at denne *standardfeilen* på middelverdiene overensstemmer med standardavviket til en gruppe dividert med kvadratroten av fem *(se notat om usikkerhet).*

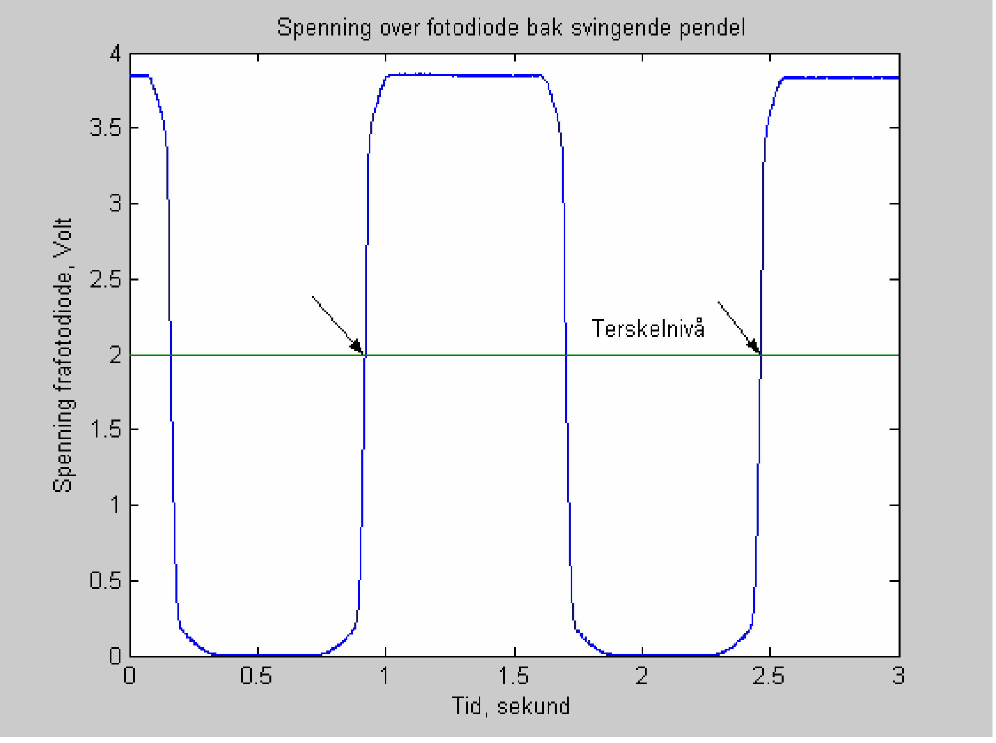
- Alle de 25 (n) målingene betraktes til slutt som en gruppe. Regn ut *SD* og *SE* i EXCEL og en bruker ***SE*** som usikkerheten i målingene.

Dersom en hadde utført 25 nye målinger, 25 ganger, kunne en bruke samme framgangsmåte som over (ved fem målinger). Det gjøres ikke, fordi en hele tiden måler på samme fordeling. Konvensjonen er at en bruker *standardfeilen* (standardavviket på middelverdiene) som mål på usikkerheten (se notat om usikkerhet).

Matlab program for innhenting av signal fra fotodiode og beregning av svingetid

```
AI=analoginput('nidaq',1);
Chan=addchannel(AI,0);
Fs=10000;
duration=3;
set(AI,'SampleRate',Fs);
ActualRate=get(AI,'SampleRate');
set(AI,'SamplesPerTrigger',duration*ActualRate);
set(AI,'TriggerType','Manual');
Fs=ActualRate;
start(AI);
trigger(AI);
data=getdata(AI);
delete(AI);
for n=1:length(data);
   tid(n)=n/Fs;
end;
figure;
Vt=2;
plot(tid,data,tid,Vt+0.*tid)
L=length(data);
pulsnr=0;
oppflanke=0;
for i=1:L-1;
   if data(i)<Vt && data(i+1)>=Vt;
      pulsnr=pulsnr +1 ;
      oppflanke(pulsnr)=i
   end
end
T=(1/Fs)*(oppflanke(2)-oppflanke(1))
```

Innhentet figur fra Matlab programmet

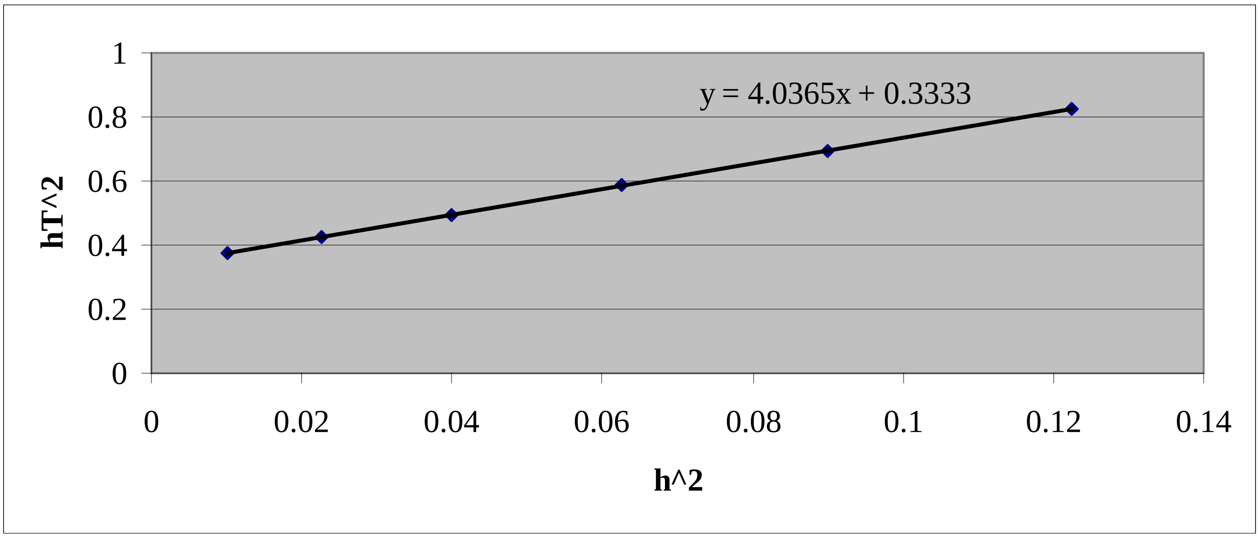


Exceldiagram for organisering og beregning av måledata,
5 svingetider som funksjon av avstand mellom opphengningspunkt og massemiddelpunkt.

H (m)	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35
T1	1.9296	1.6843	1.5732	1.5312	1.5238	1.5375
T2	1.9292	1.6844	1.5728	1.5308	1.524	1.5377
T3	1.9282	1.6842	1.5727	1.5309	1.5237	1.5383
T4	1.9286	1.6846	1.5725	1.5313	1.5241	1.535
T5	1.9301	1.6842	1.5727	1.531	1.5237	1.539
Gj.snitt	1.92914	1.68434	1.57278	1.53104	1.52386	1.5375
avikelse	0.00076	0.000167	0.000259	0.000207364	0.000181659	0.001514926
y	0.372158	0.42555	0.494727	0.58602087	0.69664479	0.827367188
x	0.01	0.0225	0.04	0.0625	0.09	0.1225

g = 4+PI()^2/4.0365	9.780359
r = (0.3333/4.0365)^(1/2)	0.287353

Figur fra regnearket over



Pendelmålinger for treghetsradius

H (m)	1.52	57	0.0057	1.5257		
T1	1.52	58	0.0058	1.5258		
T2	1.52	61	0.0061	1.5261		
T3	1.52	61	0.0061	1.5261		
T4	1.52	57	0.0057	1.5257		
T5	1.52	63	0.0063	1.5263	1.526	0.000244949
T6	1.52	60	0.006	1.526		
T7	1.52	60	0.006	1.526		
T8	1.52	59	0.0059	1.5259		
T9	1.52	58	0.0058	1.5258		
T10	1.52	59	0.0059	1.5259	1.52592	8.3666E-05
T11	1.52	61	0.0061	1.5261		
T12	1.52	61	0.0061	1.5261		
T13	1.52	62	0.0062	1.5262		
T14	1.52	61	0.0061	1.5261		
T15	1.52	59	0.0059	1.5259	1.52608	0.000109545
T16	1.52	59	0.0059	1.5259		
T17	1.52	60	0.006	1.526		
T18	1.52	62	0.0062	1.5262		
T19	1.52	63	0.0063	1.5263		
T20	1.52	62	0.0062	1.5262	1.52612	0.000164317
T21	1.52	61	0.0061	1.5261		
T22	1.52	60	0.006	1.526		
T23	1.52	60	0.006	1.526		
T24	1.52	61	0.0061	1.5261		
T25	1.52	60	0.006	1.526	1.52604	5.47723E-05
					1.526032	7.69415E-05
			Average	1.526019231		
			Avik.	0.000162528		
				3.25056E-05		
SQRT((1^2+0.025^2)/12)			r =	0.288765331		
			g =	9.790723161		
			Usikkerhet	0.003463236		